THEORY AND APPLICATIONS OF THE NOTION OF THE ANALYTIC SIGNAL

by J. VILLE
Doctor of Sciences
Telecommunications Laboratory of the Alsatian Society
of Mechanical Constructions

This publication by J. Ville[3] provides a formal basis for time-frequency methods. It develops the results of Carson and Fry[1] 1937, and Gabor[2] 1946. In particular, it introduces the *analytic signal*. Ville's paper has not been widely known, in part due to the fact that it was published in French and at a time when access to a wide range of Journals was less convenient.

A copy of this paper is available in English and in French. The English translation is produced from the same TEX source as the French one. I used a conditional statement to select either the French or the English text. This allowed keeping a single copy of all the displayed equations. Thus, if there are any remaining errors in the displayed equations, they must occur in both versions, but only need to be corrected once.

The English translation was completed in April 2011. There may be typographical and translation problems. So far, only I have done proof reading. Any suggestions for corrections or improvements would be most welcome. In March 2013 a few minor typos were corrected, a number of imprecise wordings were improved, and the layout was also improved for both the English and the French versions.

In February 2017 after Carver Mead pointed out some typos I rechecked the equations and found a substantial number of typos. These were corrected and a few translation clarifications were made. I updated the Web references to the *Internet Archive* which is the stable repository for both the English and French versions. If any updates become required they will appear there.

References

[1] Carson, J. R. & Fry, T. C. Variable Frequency Electric Circuit Theory with Application to the Theory of Frequency-Modulation. *Bell Syst Tech J*, 16(4):513–540, 1937.

[2] Gabor, D. Theory of Communication. *J. IEE*, 93, pt. III:429–457, 1946.

[3] Ville, J. Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique. *Câbles et Transmissions*, 2(1):61–74, 1948. Available in French at: archive.org or in English at: archive.org.

Michael D. Godfrey
February 2017

Stanford University
email: michaeldgodfrey@gmail.com
website: sites.google.com/site/michaeldgodfrey

Câbles et Transmissions, 2e A., No 1, pp. 61–74, 1948

THÉORIE ET APPLICATIONS DE LA NOTION DE SIGNAL ANALYTIQUE

par J. VILLE
Docteur ès-sciences
Laboratoire de Télécommunications de la Société Alsacienne
de Constructions Mécaniques

RÉSUMÉ

Le présent article est une contribution au problème de la représentation mixte d'un signal, par une répartition bidimensionnelle de l'énergie dans un domaine rapporté à deux axes, l'axe des temps et l'axe des fréquences. L'auteur propose une telle répartition, en utilisant des opérateurs analogues à ceux employés en mécanique quantique. Il parvient ainsi à une définition du spectre instantané d'un signal, et de la répartition de l'énergie attachée à une fréquence. Par intégration (par rapport au temps) du spectre instantané (qui varie avec le temps) on retrouve le spectre au sens usuel du terme. L'auteur définit également la fréquence instantanée d'un signal, en utilisant la notion de signal analytique (obtenu par prolongement analytique du signal réel quand le temps est considéré comme une variable complexe). Ces notions de fréquence instantanée et de spectre instantané sont appelées à fournir une base théorique ferme aux recherches sur la modulation de fréquence, sur l'analyse harmonique continue, sur la compression de fréquences et, d'une manière générale, à tous les problèmes pour lesquels l'analyse harmonique classique fournit une représentation s'écartant par trop de la réalité physique.

PLAN

I. — NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

II. — INTRODUCTION.

1. **Quantité d'information transmise et complication d'un signal.**
2. **Évaluation de la complication d'un signal par le nombre d'harmoniques appréciables que contient son développement de Fourier.**
3. **Nécessité de développements mixtes en temps et fréquence, pour l'étude de certaines questions.**
4. **Premières indications sur la notion de spectre instantané.**
5. **Position générale du problème du spectre instantané et de la fréquence instantanée.**

III. — PREMIÈRE PARTIE : SIGNAUX ANALYTIQUES ET FRÉQUENCE INSTANTANÉE.

6. **Prolongement d'un signal réel dans le plan complexe.**
7. **Signaux analytiques. On peut les considérer comme résultat de la modulation de leur enveloppe par une porteuse elle-même modulée en fréquence. Fréquence instantanée.**
8. **Tout signal modulé par une fréquence suffisamment élevée peut être considéré comme analytique.**

IV. — DEUXIÈME PARTIE : VITESSE DE GROUPE ET FRÉQUENCE INSTANTANÉE.

9. Vitesse de groupe et vitesse de phase.

10. Époque de groupe d'un signal considérée comme moyenne pondérée des époques de groupes des différentes fréquences.

11. Fréquence moyenne d'un signal considérée comme moyenne pondérée des différentes fréquences instantanées.

V. — TROISIÈME PARTIE : RÉPARTITION DE L'ÉNERGIE DANS UN DIAGRAMME TEMPS-FRÉQUENCE.

12. Fonction caractéristique de la répartition d'énergie.

13. Répartition d'énergie. Spectre instantané, étalement dans le temps de l'énergie associée à une fréquence.

VI. — QUATRIÈME PARTIE : APPLICATIONS DE LA NOTION DE SIGNAL ANALYTIQUE.

14. Étalement d'un signal dans le temps. Distorsion d'amplitude et distorsion de phase.

15. Admittances de transfert.

16. Filtres passe-bandes, exemples d'admittances physiquement réalisables.

17. Courbes d'admittance "en choche."

18. Filtre déphaseur faisant apparaître le signal en quadrature.

19. Signal en quadrature et transmission par bande latérale unique.

TABLEAU DONNANT LA LISTE
DES PRINCIPAUX SYMBOLES EMPLOYÉS

t	temps.
$s(t)$	signal réel.
$\sigma(t)$	signal en quadrature.
$\Psi(t)$	$= s(t) + j\sigma(t)$: signal analytique.
f	fréquence (en cycles).
ω	fréquence (en radians).
$s(\omega)$	spectre d'un signal (la fréquence étant exprimée en radians).
$\Phi(f)$	spectre d'un signal (la fréquence étant exprimée en cycles).
$\bar{t}$	valeur moyenne d'un temps.
$\bar{f}$	fréquence moyenne.
t_f	époque moyenne attachée à la fréquence f.
f_t	fréquence instantanée à l'instant t.
	D'une manière générale, nous avons comme d'usage :
j	= l'unité imaginaire.
z^*	nombre imaginaire conjugeé de z.
$\bar{\mu}$	valeur moyenne de la quantité μ.
$\lvert\mu\rvert$	module de μ.

I. — NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE.

Les articles fondamentaux traitant de la théorie générale des régimes à ≪fréquence variable≫ sont :

J. R. Carson and T. C. Fry, "Variable Frequency Electric Circuit Theory," *Bell System Technical Journal,* 1937, t. XVI, p. 513.

D. Gabor, "Theory of Communication," *Journal of the Institution of Electrical Engineers,* vol. 931 part III, no. 26, Nov. 1946, p. 429.

Dans le premier de ces articles, on étudie le comportement, à la traversée d'un réseau, d'un signal de la forme $\cos\left[\int \omega(t)dt + \varphi\right]$, de fréquence variable $\omega(t)$. Dans le second, l'auteur est amené à décomposer un signal et une série double de signaux, chacun des signaux élémentaires occupant un certain domaine dans le diagramme bidimensionnel temps-fréquences. Carson, Fry et Gabor, ont ainsi considéré des représentations mixtes, décomposent un signal à la fois dans le temps et l'échelle des fréquences, mais sans donner une définition exacte de la répartition de l'énergie dans un pareil diagramme, ce qui laisse ainsi un certain arbitraire dans les modes de représentation adoptés par eux; dans le présent travail au contraire, une répartition bidimensionnelle de l'énergie est recherchée, qui ne préjuge rien de la forme des signaux élémentaires utilisés pour faire l'analyse du signal donné.

II. — INTRODUCTION.

1. Quantité d'information transmise et complication d'un signal.

La transmission des signaux de télécommunications se fait par l'intermédiaire d'une transmission d'énergie, généralement d'énergie électromagnétique ou acoustique. Au contraire de ce qui se passe dans les transport de force, ce n'est pas tant l'énergie transportée elle-même qui est intéressante, que les variations de cette énergie au cours du temps. Plus compliquée est la fonction représentant, en fonction du temps, la variation de tension, d'intensité, de pression, ou de tout autre élément porteur d'information, plus grande est la quantité d'informations portée par l'énergie transmise.

2. Évaluation de la complication d'un signal par le nombre d'harmoniques appréciables que contient son développement de Fourier.

Pratiquement, pour évaluer le degré de complication d'une fonction intervenant dans un système de transmission, on procède à son analyse harmonique, c'est-à-dire qu'on la décompose en composantes sinusoïdales, sous forme de série ou d'intégrale de Fourier. Une fonction $s(t)$ est ainsi considérée de deux points de vue différents :

a) **du premier point de vue,** on considère la fonction directement ; à chaque valeur de t est associée une valeur de s, et la fonction est d'autant plus compliquée que la courbe représentative exprimant s en fonction de t présente plus de variations. Dans le cas de signaux acoustiques, ce premier point de vue est assez difficile à préciser ; dans le cas de signaux télégraphiques au contraire, constitués par une série de créneaux de même largeur et de même hauteur, on voit facilement qu'une fonction est d'autant plus compliquée que l'on peut loger davantage de créneaux dans un intervalle de temps donné.

b) **du deuxième point de vue,** on considère la fonction comme composée de la superposition de fonctions sinusoïdales, différant par leur amplitude et leur phase. La fonction est d'autant plus compliquée qu'elle contient davantage de composantes sinusoïdales d'amplitude appréciable. Ce deuxième point de vue est intéressant pour l'étude des distorsions ; si, en effet, le signal est transmis à travers un système distorsif qui supprime certaines composantes sinusoïdales, il y a dans cette déformation une perte d'information que l'on peut évaluer. On voit de même que l'on pourra évaluer la quantité maximum d'information que peut transmettre une voie de télécommunications, cette quantité étant proportionnelle au nombre de fréquences indépendantes que la voie peut porter. La considération de ce deuxième point de vue est donc essentielle dans la théorie des télécommunications.

3. Nécessité de développements mixtes, en temps et fréquence, pour l'étude de certaines questions.

Il existe des questions où les points de vue précédents sont insuffisants. Dès que l'on cherche à utiliser au maximum une voie de télécommunications, on est amené à renoncer à la transmission intégrale d'un signal ; de toutes manières, des déformations sont inévitables. On sait en particulier que si l'impression physiologique produite par une superposition d'harmoniques n'était pas dans une certaine mesure indépendante de la phase relative de ces harmoniques, aucune transmission téléphonique à longue distance ne serait possible. De même le problème de la compression de fréquence serait physiquement insoluble s'il fallait respecter, dans la compression de fréquences, les déphasages respectifs des différentes composantes. Mais cette tolérance dans la transmission n'est admissible que dans certaines limites de temps. Si nous considérons uné note continue, émise par un orgue par exemple, nous pouvons déphaser les harmoniques sans défigurer le son. Mais,si nous considérons une symphonie, et que nous développions en série de Fourier le son correspondant, nous obtiendrons une série d'harmoniques, *s'étendant sur toute la durée de la symphonie,* que nous ne pouvons évidemment pas déphaser arbitrairement.

Nous voyons ainsi la nécessité d'aller plus avant dans l'analyse harmonique d'une fonction. Nous allons montrer sur le cas particulier d'un signal acoustique dans quelle voie générale nous devons nous diriger.

4. Premières indication sur la notion de spectre instantané.

A l'audition d'un morceau de musique il n'y a aucun rapport entre l'impression physiologique éprouvée à un instant donné et l'amplitude du signal acoustique $s(f)$ considéré : l'oreille ne réagit qu'à une *succession* de valeurs de $s(t)$. Mais cela n'entraîne point que la définition de $s(f)$ par ses composantes sinusoïdales soit parfaite. Si nous considérons en effet un morceau contenant plusieurs mesures (ce qui est le moins qu'on puisse demander) et qu'une note, *la* par exemple, figure une fois dans le morceau, l'analyse harmonique nous présentera la fréquence correspondante avec une certaine amplitude et une certaine phase, sans localiser le *la* dans le temps. Or, il est évident qu'au cours du morceau il est des instants où l'on n'entend pas le *la.* La représentation est néanmoins mathématiquement correcte, parce que les phases des notes voisines du *la* sont agencées de manière à détruire cette note par interférence lorsqu'on ne l'entend pas et à la renforcer, également par interférence, lorsqu'on l'entend ; mais s'il y a dans cette conception une habileté qui honore l'analyse mathématique, il ne faut pas se dissimuler qu'il y a également une défiguration de la réalité : en effet, quand on n'entend pas le *la,* la raison véritable est que le *la n'est pas* émis.

Il est donc souhaitable de rechercher pour un signal une définition mixte, du genre de celle préconisée par Gabor : à chaque instant, se présentent un certain nombre de fréquences donnant la hauteur et le timbre du son tel qu'on l'entend ; à chaque fréquence est associée une certaine répartition, dans le temps qui définit les intervalles pendant lesquels la note correspondante est émise. On est ainsi conduit à la définition d'un *spectre instantané, fonction du temps,* donnant la structure d'un signal à un instant donné ; le spectre du signal, au sens usuel du terme, qui donne la structure en fréquences du signal pendant toute sa durée d'émission, s'obtient alors en cumulant tous les spectres instantanés (d'une manière précise en les intégrant relativement au temps). D'une manière corrélative, on est amené à une répartition des fréquences dans le temps ; en intégrant ces répartitions, on reconstitue le signal.

Malheureusement, les choses ne sont pas si simples qu'elles paraissent à première vue. Nous voyons en effet que nous avons à envisager *l'analyse harmonique continue* d'un signal ; or, pour une telle analyse, nous pouvons soit :

d'abord découper le signal en tranches (dans le temps) par un commutateur ;

ensuite présenter ces différentes tranches à un système de filtres, pour les analyser.

Soit :

d'abord filtrer différentes bandes de fréquences ;

ensuite découper ces bandes en tranches (dans le temps), pour étudier leurs variations d'énergie.

L'analyse harmonique continue consiste donc à appliquer deux opérateurs (filtrage et commutation).

Or, ces deux opérateurs sont tels que chacun d'eux, s'il est très précis (tranches très brèves ou bandes très étroites) rend l'autre inopérant, parce qu'il déforme le signal d'une fàçon considérable (par l'introduction de courants transitoires pour la commutation, d'un grand étalement dans le temps pour les filtres à bandes étroites). La détermination du spectre instantané ne peut donc se faire, physiquement, que d'une manière approchée. Mais là se pose à notre avis, une question : une manière approchée *de quoi?* C'est pourquoi nous avons essayé d'obtenir une définition précise du spectre instantané, de manière à avoir une base théorique, jusqu'ici absolument inexistante, pour guider les recherches dans la spécification d'appareils d'analyse harmonique continue, de compression de fréquence, ou tous autres dispositifs pour la compréhension desquels les notions classiques de fréquence et de spectre sont insuffisantes.

Après ces considérations générales, nous allons poser la question en termes plus précis :

5. Position générale du problème du spectre instantané et de la fréquence instantanée.

On sait les difficultés que présente la définition de la fréquence instantanée d'un signal. Ces difficultés tiennent essentiellement à ce que la fréquence d'un signal sinusoïdal n'est définie rigoureusement que dans le cas ou le signal a une durée indéfinie ; quant au spectre d'un signal $s(t)$, qui a pour expression

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int s(t) e^{-j\omega t} dt \tag{1}$$

il est défini pour l'ensemble du signal, et ne contient pas le temps d'une manière explicite. Donc, dans la théorie classique, ni le spectre instantané, associé à un instant t, ni la fréquence instantanée ne sont susceptibles de définition. Il s'agit pourtant là de notions intuitives. Si, par exemple, nous considérons un signal lentement modulé en fréquence, de la forme :

$$s(t) = \cos\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t\right) \tag{2}$$

il est évident que la ≪fréquence instantanée≫ (qui est définie conventionnellement dans le cas de la modulation de fréquence) :

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t\right) = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t \tag{3}$$

a une signification physique, et cela d'une manière d'autant plus précise que Ω est plus petit par rapport à ω_0.

Nous nous proposons ici de donner une définition du spectre instantané, valable pour une catégorie de signaux assez étendue, et de développer quelques applications des considérations auxquelles ce problème nous aura conduits. La définition que nous proposons fait appel à des conventions qui peuvent paraître arbitraires, mais qui se justifient par la cohérence des résultats et leur parallélisme avec des conventions analogues qui se sont révélées fécondes en mécanique quantique.

Notre point de départ est le suivant : il a été facile d'associer une fréquence instantanée au signal (2) parce que ce signal ≪peut étre considéré≫ comme la partie réelle du signal

$$\Psi(t) = e^{j\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \omega t\right)} \tag{4}$$

lequel *est à module constant.* La fréquence instantanée, en radians/sec, n'est alors autre que :

$$\omega = \frac{d}{dt} \arg \Psi \tag{5}$$

Nous aurons donc, dans le cas d'un signal quelconque, à le prolonger dans le plan complexe, de manière à le mettre sous la forme :

$$s(t) = \frac{1}{2}\left[\Psi(t) + \Psi^*(t)\right] \tag{6}$$

et nous obtiendrons ainsi la fréquence instantanée par la formule (5) ; $\Psi(t)$ sera appelé *signal analytique.* La première partie de l'article sera consacrée à l'établissement des formules correspondantes. Pour justifier, d'un autre point de vue, cette définition de la fréquence instantanée, nous la rattacherons à la notion de vitesse de groupe, ce qui constituera une deuxième partie. Nous passons ensuite à la notion de spectre instantané, parce que la fréquence instantanée ne définit un signal que d'une manière assez grossière, et doit étre considérée comme la valeur moyenne, à un instant donné, des fréquences figurant dans le spectre instantané. Nous traitons cette question dans une troisième partie, d'après les principes suivants : un signal peut étre considéré comme le support d'une certaine quantité d'énérgie, dont on connaît la répartition dans le temps (donnée par la forme du signal) et dans l'échelle des fréquences (donnée par le spectre). Si le signal s'étend sur un intervalle de temps T et un intervalle de fréquences Ω, nous avons ainsi une répartition d'énergie dans un rectangle d'aire TQ. Nous connaissons les projections de cette distribution sur les côtés du rectangle, mais nous ne la connaissons pas dans le rectangle lui-méme. Si nous cherchons à déterminer la distribution dans le rectangle, nous nous heurtons à la difficulté suivante : si nous découpons le signal dans l'échelle des temps, nous étalons les fréquences ; si nous le découpons dans l'échelle des fréquences, nous étalons les temps. On ne peut donc pas déterminer la distribution par des mesures successives. Il faut donc chercher une détermination simultanée, qui n'a qu'une signification théorique : pour cela, nous devons opérer *soit* sur le signal, *soit* sur le spectre. Or, pour le signal par exemple, si le temps est une variable, la fréquence est, à proprement parler, un opérateur (à savoir l'opérateur $1/2\pi j\ d/dt$ pour des fréquences en cycles/sec). Nous avons déterminé la distribution simultanée de t et de $1/2\pi j\ d/dt$, par les méthodes du calcul des probabilités, qui conduit facilement au spectre instantané (et, également, à la répartition, dans le temps, de l'énergie attachée à une fréquence). On voit ainsi que le caractère formel du mode de calcul employé est imposé par la nature de la difficulté rencontrée, qui est analogue à celle qui se présente en mécanique quantique, quand on doit composer des opérateurs non permutables. Nous utilisons beaucoup de résultats dus à Gabor (Theory of Communication), et employons les mêmes notations, ce qui nous dispense de démontrer certains résultats, et nous permet de développer principalement les points de vue nouveaux. Enfin, une quatrième partie contient quelques applications de la notion de signal analytique qui nous a été imposée, comme nous l'avons dit, dans la recherche de la fréquence instantanée.

III. — PREMIÉRE PARTIE : SIGNAUX ANALYTIQUES ET FRÉQUENCE INSTANTANÉE.

6. Prolongement d'un signal réel dans le plan complexe.

Considérons le signal :

$$s(t) = \cos \omega t \tag{1}$$

Nous pouvons le considérer, indifféremment, comme partie réelle de :

$$\Psi(t) = e^{j\omega t} \tag{2}$$

ou de :

$$\Psi^*(t) = e^{-j\omega t} \tag{3}$$

Tant que t ne prend que des valeurs réelles, il n'y a pas de raison pour choisir l'une de ces deux formes plutôt que l'autre. Ce n'est que si t prend des valeurs complexes

$$t = \tau + j\theta \tag{4}$$

que nous voyons apparaître des différences. Si, en effet, θ tend vers $+\infty$, Ψ tend vers zéro et Ψ^* vers l'infini.

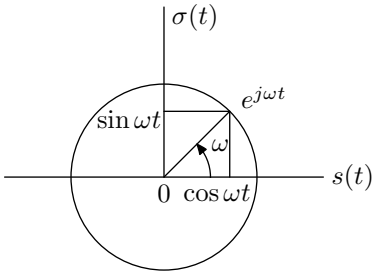

Fig. 1. *La fréquence instantanée ω d'un signal $\cos\omega t$ est la vitesse angulaire du point coordonnees : $\cos\omega t, \sin\omega t$ ($\sin\omega t$: signal en quadrature de $\cos\omega t$).*

Si nous convenons de ne conserver, dans la mesure du possible, que des fonctions régulières dans le demi-plan supérieur, nous choisirons donc (*fig.* 1)

$$\Psi(t) = e^{j\omega t} \tag{5}$$

Prenons un autre exemple simple. Soit le signal :

$$s(t) = \frac{1}{1+t^2} \tag{6}$$

Nous pouvons le considérer indifféremment comme partie réelle des deux fonctions :

$$\frac{1}{1+jt} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1-jt}$$

Une seule d'entre elles, la seconde, est régulière dans le demi-plan, supérieur ; nous choisirons donc

$$\Psi(t) = \frac{1}{1-jt} \tag{7}$$

Considérons un troisième exemple. Soit le signal :

$$s(t) = \begin{cases} 1 & : -1 < t < +1 \\ 0 & : t < -1 \quad \text{ou} \quad t > 1 \end{cases} \tag{8}$$

Nous pouvons considérer $s(t)$ comme partie réelle de :

$$\Psi(t) = \frac{1}{\pi j} \log \frac{t-1}{t+1} \tag{9}$$

avec une détermination convenablement choisie. La fonction (9) n'est pas uniforme ; nous la rendrons uniforme dans le demi-plan supérieur en excluant de ce demi-plan les points singuliers -1 et $+1$.

D'une manière générale, les principes ci-dessus conduisent à associer au signal $s(t)$ le signal *en quadrature,*

$$\sigma(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)d\tau}{\tau - t} \tag{10}$$

et la fonction

$$\Psi(t) = s(t) + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau \tag{11}^*$$

La formule (11) définit $\Psi(t)$ comme fonction de la variable complexe t, holomorphe dans le demi-plan supérieur. On démontre que, réciproquement, on a, pour t réel :

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\tau)d\tau}{\tau - t} \tag{12}$$

---

* L'article original a donné cette équation comme:

$$\Psi(t) = s(t) + j\sigma(t) = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)d\tau}{t-\tau} \tag{11}$$

Prof. Thomas Schanze a remarqué cela et a fourni la correction.

7. Signaux analytiques. On peut les considérer comme résultat de la modulation de leur enveloppe par une porteuse elle-même modulée en fréquence. Fréquence instantanée.

Un signal tel que $\Psi(t)$ sera appelé *signal analytique.* Nous pouvons alors définir $s(t)$ par :

$$s(t) = \mathrm{R}_e\left[|\Psi(t)|e^{j\arg\Psi}\right] \tag{13}$$

ce qui nous définit $s(t)$ comme le résultat *de la modulation du signal* $e^{j\arg\Psi}$ *par le signal* $|\Psi|$. Si nous considérons que $|\Psi|$ représente *l'enveloppe* de $s(t)$, et que $e^{j\arg\Psi}$ est un signal *modulé en fréquence,* nous obtenons pour la fréquence instantanée l'expression (*fig.* 2).

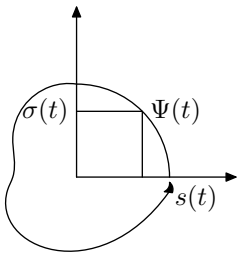

Fig. 2. — La *fréquence instantanée du signal* $s(t)$ *est la vitesse angulaire du point* $\Psi(t) = s(t) + j\sigma(t)$, *où* $\sigma(t)$ *est le signal en quadrature de* $s(t)$.

$$f_t = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\arg\Psi = \frac{1}{4\pi j}\frac{\Psi^*}{\Psi}\frac{d}{dt}\frac{\Psi}{\Psi^*} \tag{14}$$

Pour $s(t) = \cos(\omega t + \varphi)$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \Psi(t) & = e^{j(\omega t+\varphi)} \\ f_t & = \frac{\omega}{2\pi} \end{cases} \qquad \omega > 0 \tag{15}$$

La fréquence instantanée est constante pour ce signal. Si nous considérons le signal :

$$s(t) = \frac{1}{1+t^2} = \mathrm{R}_e\Big[\frac{1}{1-jt}\Big]$$

nous obtenons :

$$f_t = \frac{1}{2\pi}\quad\frac{1}{1+t^2} \tag{16}$$

Considérons maintenant un signal sinusoïdal modulé :

$$s(t) = \cos\omega t\cos\Omega t \qquad \Omega > \omega > 0$$

nous avons alors :

$$\Psi(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j(\Omega+\omega)t} + e^{j(\Omega-\omega)t}\right]$$

$$|\Psi(t)| = \cos\omega t \qquad f_t = \frac{\Omega}{2\pi}$$

La fréquence instantanée est ici la fréquence porteuse, et $|\Psi|$ est l'enveloppe telle qu'elle est définie usuellement. On remarquera l'importance du fait que dans les exponentielles les coefficients de t sont positifs. Négliger cette précaution amènerait à intervertir les rôles de ω et Ω, et conduirait à des résultats absurdes.

8. Tout signal modulé par une fréquence suffisamment élevée peut être considéré comme analytique.

Le fait que dans l'exemple précédent on retrouve pour la fréquence instantanée la fréquence porteuse n'est pas isolé, mais résulte de la proposition suivante :

Quel que soit la signal $s(t)$, *la fonction :*

$$\overline{\Psi}(t) = s(t)e^{j\omega_0 t} \qquad \omega_0 > 0$$

qui n'est pas en général un signal analytique, se rapproche d'autant plus du signal analytique $\Psi(t)$ *(associé à* $s(t)\cos\omega_0 t$*) que* ω_0 *est plus grand :*

On voit immédiatement que cela a pour conséquence d'attribuer, pour les grandes valeurs de ω_0, la fréquence instantanée $\omega_0/2\pi$ à $s(t)\cos\omega_0 t$.

La proposition que nous venons d'utiliser est elle-même une conséquence immédiate du fait qu'un signal analytique est caractérisé par la particularité d'avoir un spectre dont l'amplitude est nulle pour les fréquences négatives. Or, moduler $s(t)$ par $e^{j\omega_0 t}$ revient à faire subir une translation ω_0 au spectre de $s(t)$. Pour une valeur de ω_0 suffisamment grande, le spectre se trouve tout entier dans la région des fréquences positives, et $s(t)e^{j\omega_0 t}$ devient analytique.[1)]

IV. — DEUXIÉME PARTIE : VITESSE DE GROUPE ET FRÉQUENCE INSTANTANÉE

9. Vitesse de groupe et vitesse de phase.

On sait que si un signal possède une vitesse de phase V_φ, sa vitesse de groupe est :

$$V_g = \frac{d\omega}{d(\omega/V_\varphi)} \tag{1}$$

On constate sur cette formule que les caractéristiques simples sont plutôt les *inverses* des vitesses de groupe et de phase, c'est-à-dire les temps de propagation de groupe et de phase sur une longueur donnée.

10. Époque de groupe d'un signal considérée comme moyenne pondérée des époques de groupes des différentes fréquences.

Considérons maintenant un signal analytique $\Psi(t)$, et soit $\Phi(f)$ son spectre[2)]; nous avons :

$$\Psi(t) = \int \Phi(f) e^{2\pi j f t} df \tag{2}$$

$$\Phi(f) = \int \Psi(t) e^{-2\pi j f t} dt \tag{3}$$

$$(-1)^n \int \Psi^* t^n \Psi dt = \int \Phi^* \left[\frac{1}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right]^n \Phi dt \tag{4}$$

$$\int \Phi^* f^n \Phi df = \int \Psi^* \left[\frac{1}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right]^n \Psi dt \tag{5}$$

Cherchons à évaluer l'*époque* du signal. Nous pouvons considérer que l'énergie du signal se manifeste à raison de la densité $\Psi^*\Psi$ pendant l'intervalle dt. Ceci nous donne pour l'époque une valeur moyenne :

$$\bar{t} = \frac{\int \Psi^* t \Psi dt}{\int \Psi^* \Psi dt} \tag{6}$$

Cette époque, étant déterminée par des considérations energétiques, sera appelée *époque de groupe.* Utilisons maintenant la formule (4) ; nous obtenons :

$$\bar{t} = -\frac{1}{2\pi j}\frac{\int \Phi^* \frac{d}{df}\Phi df}{\int \Phi^* \Phi df} \tag{7}$$

---

1) Là est la véritable raison de l'emploi par GABOR de signaux en cloche *modulés.*

2) Nous utilisons, selon les cas, les notations ω ou f pour la fréquence, mesurée en radians/sec ou cycles/sec, respectivement. Les spectres sont alors représentés par $S(w)$ ou $\Phi(f)$.

Mettons en évidence le module et l'argument de Φ :

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d}{df}\Phi = \frac{1}{|\Phi|}\frac{d}{df}\Phi + j\frac{d}{df}\arg\Phi$$

Comme $\bar{t}$ est réel, nous obtenons :

$$\bar{t} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\int \Phi^*\Phi\frac{d}{df}\arg\Phi df}{\int \Phi^*\Phi df} \tag{8}$$

Considérons maintenant que l'énergie du signal se répartit dans l'échelle des fréquences avec une densité $\Phi\Phi^*$; nous voyons que $\bar{t}$, *époque de groupe relative au signal tout entier,* s'obtient en prenant la moyenne pondérée des quantités :

$$\bar{t}_f = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{df}\arg\Phi \tag{9}$$

que nous considérerons donc comme les *époques de groupe relatives aux différentes fréquences.* Nous voyons ainsi que la *puissance associée à la fréquence* f peut être considérée comme se manifestant, avec d'ailleurs un certain étalement, à *l'instant moyen* $\bar{t}_f$.

11. Fréquence moyenne d'un signal considérée comme moyenne pondérée des différentes fréquences instantanées.

Intervertissons maintenant le rôle de f et de t. Nous constatons alors que la fréquence moyenne du signal, définie par :

$$\overline{f} = \frac{\int \Phi^* f\Phi df}{\int \Phi^*\Phi df}$$

peut être définie également par :

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi}\frac{\int \Psi^*\Psi\frac{d}{dt}\arg\ \Psi dt}{\int \Psi^*\Psi dt}$$

c'est-à-dire comme *moyenne pondérée d'une fréquence instantanée* :

$$f_t = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\arg\Psi \qquad (\text{dans } c/s) \tag{10}$$

Nous retrouvons bien l'expression que nous avons déjà rencontrée.

V. — TROISIÈME PARTIE : RÉPARTITION DE L'ÉNERGIE DANS UN DIAGRAMME TEMPS-FRÉQUENCE.

12. Fonction caractéristique de la répartition d'energie

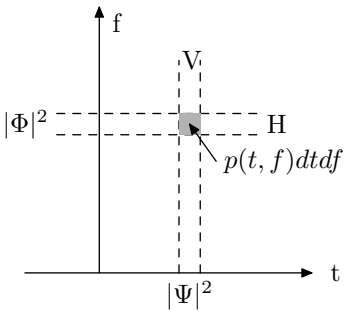

Fig. 3. — *A l'élément dt df, dans le diagramme temps fréquence, correspond une énergie $p(t,f)dtdf$. La répartition de ces énergies dans une bande verticale donne le spectre instantané à l'instant t ; dans une bande horizontale, nous obtenons l'étalement dans le temps de énergie portée par une fréquence. Par projection sur les axes, on obtient le signal (sur l'axe des temps) et son spectre (sur l'axe des fréquences).*

Nous allons définir maintenant une répartition de l'énergie dans le temps *et* dans l'échelle des fréquences, de la forme (*fig.* 3)

$$p(t,f)dtdf \tag{1}$$

Nous supposerons dans ce qui suit, que nous avons affaire à un signal normé, pour lequel :

$$\int \Phi^* \Phi df = \int \Psi^* \Psi dt = 1 \tag{2}$$

ce qui ne restreint en rien la généralité. p jouit alors des mêmes propriétés qu'une fonction de distribution de probabilités, et nous allons déterminer sa *fonction caractéristique* :

$$F(u,\nu) = \iint e^{j(ut+\nu f)} p(t,f)dtdf \tag{3}$$

Nous avons à calculer la valeur moyenne de $e^{j(ut+\nu f)}$ mais nous n'avons pour ce faire que la fonction Ψ, qui ne contient pas f, ou Φ, qui ne contient pas t. Nous sommes donc obligés de considérer soit t, soit f comme un opérateur. Si nous nous servons de Ψ, nous serons amenés à la formule :

$$F(u,\nu) = \int \Psi^* e^{j\left(ut + \frac{\nu}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right)} \Psi(t)dt \tag{4}$$

Voyons ce que donne cet opérateur exponentiel, appliqué à Ψ. Si nous le décomposons en deux, nous obtenons, selon l'ordre dans lequel nous considérons les facteurs :

$$e^{jut} e^{\frac{\nu}{2\pi}\frac{d}{dt}} \Psi(t) = e^{jut} \Psi\left(t + \frac{\nu}{2\pi}\right)$$

ou :

$$e^{\frac{\nu}{2\pi}\frac{d}{dt}} e^{jut} \Psi(t) = e^{ju\left(t+\frac{\nu}{2n}\right)} \Psi\left(t + \frac{\nu}{2\pi}\right)$$

Ces formules sont inacceptables, comme incompatibles avec la relation :

$$F^*(u,\nu) = F(-u,-\nu)$$

que l'on déduit de (3) (pour u, ν réels).

Considérons maintenant la moyenne géométrique[3)] des deux résultats donnés par les formules précédentes, soit :

$$e^{j\left(ut + \frac{\nu}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right)} \Psi(t) = e^{ju\left(t+\frac{\nu}{4\pi}\right)} \Psi\left(t + \frac{\nu}{2\pi}\right) \tag{5}$$

[3)] La forme (5) de l'opérateur considéré est celle que l'on obtient si l'on suppose que l'on développe les puissances $\left(\mu t + \frac{\nu}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right)^n$ *en conservent l'ordre des termes.*

Nous obtenons (avec un léger changement de notations) :

$$F(u,\nu) = \int \Psi^*\left(t - \frac{\nu}{4\pi}\right)\Psi\left(t + \frac{\nu}{4\pi}\right)e^{jut}dt \tag{6}$$

qui est une forme acceptable de $F(u,\nu)$.

13. Répartition d'énergie. Spectre instantané ; étalement dans le temps de l'énergie associée à une fréquence.

La présence du facteur e^{jut} nous montre que la fonction caractéristique de f quand t est connu n'est autre que :

$$\Psi^*\left(t - \frac{\nu}{4\pi}\right)\Psi\left(t + \frac{\nu}{4\pi}\right)\Big/|\Psi|^2 \tag{7}$$

d'où la fonction de distribution de f *quand* t *est connu* :

$$p_t(f) = \frac{1}{2\pi|\Psi|^2}\int \Psi^*\left(t - \frac{\nu}{4\pi}\right)\Psi\left(t + \frac{\nu}{4\pi}\right)e^{-j\nu f}d\nu \tag{8}$$

La fonction de distribution de t étant $|\Psi(t)|^2$, nous obtenons en définitive :

$$p(t,f) = \frac{1}{2\pi}\int \Psi^*\left(t - \frac{\nu}{4\pi}\right)\Psi\left(t + \frac{\nu}{4\pi}\right)e^{-j\nu f}d\nu \tag{9}$$

Le *spectre instantané,* en module[4)], est donné par la formule (8) ; d'une manière analogue, la répartition, dans le temps, de l'énergie attachée à une fréquence serait :

$$p_f(t) = \frac{1}{2\pi|\Phi|^2}\int \Phi^*\left(t + \frac{u}{4\pi}\right)\Phi\left(t - \frac{u}{4\pi}\right)e^{-jut}du \tag{10}$$

VI. — QUATRIÈME PARTIE : APPLICATIONS DE LA NOTION DE SIGNAL ANALYTIQUE.

La dualité qui existe entre temps et fréquence permet de se faire une idée plus claire de certains phénomènes ; nous allons traiter ici quelques exemples typiques.

14. Étalement d'un signal dans le temps. Distorsion d'amplitude et distorsion de phase.

Soit $\Psi(t)$ un signal analytique. Si nous nous attachons à la fréquence, nous constatons que ce signal a une enveloppe $|\Psi(t)|$ qui module un signal à fréquence instantanée variable. Donc, dans l'étalement des fréquences, nous devons nous attendre à voir apparaître *deux termes,* l'un tenant compte de la *variation de la fréquence instantanée,* l'autre des *variations d'amplitude de l'enveloppe.* Analytiquement, supposons donc que nous avions pris pour origine des fréquences la fréquence moyenne $\overline{f}$, moyenne des fréquences instantanées[5]). Nous avons ainsi :

$$\overline{f} = \int \Psi^*\Psi f_t dt = 0 \tag{1}$$

[4)] Il ne semble pas possible d'atteindre la phase du spectre instantané.

[5]) Nous supposons encore ici que le signal est normé.

L'étalement en fréquences sera :

$$\overline{f^2} = \int \Phi^* f^2 \Phi df \tag{2}$$

et l'étalement des fréquences instantanées :

$$\overline{f_t^2} = \int \Psi^* f_t^2 \Psi dt \tag{3}$$

Formons la différence et exprimons tout en fonction de Ψ

$$\overline{f^2} - \overline{f_t^2} = -\frac{1}{4\pi^2} \int \left[\Psi^* \frac{d}{dt^2} \Psi + \Psi^* \left(\frac{d}{dt} \arg \Psi \right)^2 \Psi \right] dt \tag{4}$$

Posons :

$$\Psi = |\Psi| e^{j \arg \Psi}$$

La dérivation donne :

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d}{dt} \Psi = \frac{1}{|\Psi|} \frac{d}{dt} |\Psi| + j \frac{d}{dt} \arg \Psi$$

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d^2}{dt^2} \Psi - \frac{1}{\Psi^2} \left(\frac{d}{dt} \Psi \right)^2 = -\frac{1}{|\Psi|^2} \left(\frac{d}{dt} |\Psi| \right)^2 + \text{ etc} \dots$$

Portant l'expression de $\frac{1}{\Psi} \frac{d^2}{df^2} \Psi$ dans (4) et ne conservant que les termes réels, il vient :

$$\overline{f^2} - \overline{f_t^2} = -\frac{1}{4\pi^2} \int \left[\frac{d}{dt} |\Psi| \right]^2 dt$$

d'où l'expression finale pour $\overline{f^2}$:

$$\overline{f^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int \Psi \Psi^* \left[\left(\frac{d}{dt} \arg \Psi \right)^2 + \left(\frac{1}{|\Psi|} \frac{d}{dt} |\Psi| \right)^2 \right] dt \tag{5}$$

Nous voyons bien apparaître les deux termes prévus, l'un relatif à l'étalement des fréquences instantanées, l'autre aux variations d'amplitude de l'enveloppe.

Si nous raisonnons maintenant sur l'étalement dans le temps, nous obtiendrons, en prenant pour origine le temps moyen $\overline{t}$:

$$\overline{t^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int \Phi \Phi^* \left[\left(\frac{d}{df} \arg \Phi \right)^2 + \left(\frac{1}{|\Phi|} \frac{d}{df} |\Phi| \right)^2 \right] df \tag{6}$$

Nous retrouvons là des notions familières ; en effet, si nous supposons que le signal a été produit par le passage d'une impulsion de Dirac à travers un filtre de caractéristique $\Phi(f)$, nous retrouvons dans $\overline{t^2}$ les deux éléments de la distorsion, le premier terme résultant de la distorsion de phase, le second de la distorsion d'amplitude. Nous remarquons que la distorsion de phase ici introduite est une *distorsion de temps de propagation de groupe* (≪delay distorsion≫).

En faisant intervenir les logarithmes, nous obtenons, pour les dispersions de temps et de fréquence, les expressions :

$$\overline{f^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int \left| \Psi^* \frac{d}{dt} \log \Psi \right|^2 dt = \int \left| \frac{d\Psi}{dt} \right|^2 dt$$

$$\overline{t^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int \left| \Phi^* \frac{d}{df} \log \Phi \right|^2 df = \int \left| \frac{d\Phi}{df} \right|^2 df \tag{7}$$

15. Admittances de transfert.

Soit une admittance de transfert $Y(j\omega)$. On sait que si ω est complexe, les courants amortis de la forme $e^{j\omega t}$ sont tels que la partie imaginaire de ω soit positive. Donc $Y(j\omega)$ est réguliére dans le demi-plan inférieur. Si nous nous reportons aux propriétés des signaux analytiques, nous voyons ainsi que l'on peut passer de la forme d'une admittance à la forme d'un signal analytique par le changement de variable :

$$\omega = -t \tag{8}$$

Si $\Psi(t)$ est un signal analytique, nous pouvons en déduire une impédance de transfert par la formule :

$$Y(j\omega) = \Psi(-\omega) \tag{9}$$

L'admittance impulsive associée à $Y(j\omega)$ est :

$$B(t) = \frac{1}{2\pi} \int Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{10}$$

Par ailleurs, le spectre de $\Psi(t)$ est :

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-j\omega t} \Psi(t) dt = B(\omega) \tag{11}$$

Nous constatons que $B(t)$ est null pour les valeurs négatives de t, de même que $S(\omega)$ est null pour les valeurs négatives de ω. La seule restriction nouvelle à imposer est que $B(t)$ soit réel, ce qui entraîne que $\omega(t)$ soit un signal analytique *symétrique,* c'est-à-dire tel que :

$$\Psi(-t) = \Psi^*(t) \qquad \text{(pour } t \text{ réel)} \tag{12}$$

Sous la condition (12), il y a concordance parfaite entre admittances de transfert et signaux analytiques, entre spectres et admittances impulsionnelles.

16. Filtres passe-bandes ; exemples d'admittances physiquement réalisables.

La formation de l'admittance de transfert d'un filtre est analogue, avons-nous vu, à la formation d'un signal analytique. Or, pour former un signal analytique, il suffit de partir d'un signal quelconque $s(t)$, et de former son spectre, ce qui donne :

$$s(t) = \int S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \qquad [S(-\omega) = S^*(\omega)] \tag{13}$$

et ensuite, de ne conserver, en la doublant, que la partie de ce spectre correspondant aux fréquences positives, ce qui conduit à :

$$\Psi(t) = 2 \int_0^\infty S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{14}$$

Pour ne pas couper dans ce spectre, on peut le déporter vers la droite par une modulation convenable.

Le procédé correspondant pour former une admittance de transfert est le suivant :

On part d'une admittance non physiquement réaisable, soit $Y_1(j\omega)$, et on détermine l'admittance impulsive $B_1(t)$ correspondante :

$$B_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int Y_1(j\omega t) e^{j\omega} d\omega \tag{15}$$

$B_1(t)$ ne s'annule pas pour $t < 0$ (c'est là ce qui indique que Y_1 n'a pas de réalité physique). On déporte ensuite $B_1(t)$ vers la droite, et on la coupe, de manière que $B_1(t) = 0$ pour $t < 0$. On en déduit Y :

$$Y(j\omega) = \int_0^\infty B(t) e^{-j\omega t} dt \tag{16}$$

Si T est l'amplitude de la translation que l'on a fait subir à $B_1(t)$, nous obtenons :

$$Y(j\omega) = \int_0^\infty B_1(t-T) e^{-j\omega t} dt$$

Si $B_1(t)$ est symétrique, on peut aussi couper la fin du signal, ce qui donne :

$$Y(j\omega) = \int_0^{2T} B_1(t-T) e^{-j\omega t} dt \tag{17}$$

Cette dernière admittance présente alors l'avantage de ne pas avoir de distorsion de phase. Mais il y a une distorsion d'amplitude. Soit, par exemple :

$$Y_1 = \begin{cases} 1 & \text{pour } \omega_1 < \omega < \omega_2 \quad \text{et} - \omega_2 < \omega < -\omega_1 \\ 0 & \text{en dehors des intervalles ci-dessus} \end{cases} \tag{18}$$

$$B_1(t) = \frac{\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t}{\pi(\omega_2 - \omega_1)t}$$

$$Y(j\omega) = \int_0^{2T} \frac{\sin \omega_2(t-T) - \sin \omega_1(t-T)}{\pi(\omega_2 - \omega_1)(t-T)}$$

$Y(j\omega)$ a pour argument – $j\omega T$; il n'y a donc pas de distorsion de phase. Par ailleurs, quand T tend vers l'infini, $|Y|$ tend bien vers la caractéristique d'un passe-bande idéal ; mais au voisinage de ω_1 et ω_2 se présentent des oscillations dues au phénomène de Gibbs.

17. Courbes d'admittance ≪en cloche≫.

Les courbes d'admittance ≪en cloche≫ permettent d'éviter cette difficulté. On sait que le signal :

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{19}$$

a le spectre :

$$S(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \tag{20}$$

d'où, pour le signal :

$$s(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{21}$$

le spectre :

$$S(\omega) = e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} e^{-j\omega t_0} \tag{22}$$

Si nous modulons par $e^{j\omega_0(t-t_0)}(\omega_0 > 0)$, nous déplaçons le spectre de ω_0, d'où :

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} e^{j\omega_0(t-t_0)} \\ S(\omega) &= e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}}\, e^{-j\omega t_0} \end{aligned} \tag{23}$$

Dès que $\omega_0 > \frac{3}{\sigma}, S(\omega)$ peut être considéré comme situé dans la région $\omega > 0$. Au signal :

$$s(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} \cos\omega_0(t-t_0) \tag{24}$$

correspond le spectre :

$$S(\omega) = e^{-j\omega t_0} \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} + e^{-\frac{\sigma^2(\omega+\omega_0)^2}{2}}\right] \tag{25}$$

Pour $t_0 > 3\sigma$, nous pouvons considérer $S(\omega)$, donné par (25), comme une admittance de transfert. Pour $\omega_0 > 3/\sigma$, nous pouvons ne conserver dans (25) que le premier terme du crochet. On constate facilement que si dans (24) on remplace le cosinus par un sinus, cela revient à remplacer (25) par :

$$S(\omega) = je^{-j\omega t_0} \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} - e^{-\frac{\sigma^2(\omega+\omega_0)^2}{2}}\right] \tag{26}$$

Supposons que nous voulions spécifier un passe-bande dans la bande (ω_1, ω_2). Nous choisirons $\sigma > 3/\omega_1,\ t_0 > 3\sigma > 9/\omega_1$ et intégrerons en w_0 entre ω_1 et ω_2, ce qui donne (en ajoutant des coefficients convenables) :

$$\begin{aligned} Y(j\omega) = S(\omega) &= e^{-j\omega t_0} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} d\omega_0 \\ s(t) = B(t) &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} \frac{\sin\omega_2(t-t_0) - \sin\omega_1(t-t_0)}{t-t_0} \end{aligned} \tag{27}$$

Un filtre passe-bas serait caractérisé par :

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= e^{-j\omega t_0} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} d\omega_0 \\ B(t) &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} \frac{\sin\omega_1(t-t_0)}{t-t_0} \end{aligned} \tag{28}$$

18. Filtre déphaseur faisant apparaître le signal en quadrature.

Si, au lieu de (25), nous partons du spectre (26), et que nous intégrions entre 0 et ω_1, nous obtenons un filtre d'un type assez particulier, caractérisé par :

$$Y(j\omega) = -je^{j\omega t_0}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\omega_1}\left[e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} - e^{-\frac{\sigma^2(\omega+\omega_0)^2}{2}}\right]d\omega_0$$

(29)

$$s(t) = B(t) = \frac{1}{\pi}e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}\ \frac{1-\cos\omega_1(t-t_0)}{t-t_0}$$

Si ω_1 et σ tendent vers l'infini, nous voyons qu'en supprimant le facteur $e^{-j\omega t_0}$, nous obtenons une impédance de transfert de la forme (pour ω réel) :

$$Y(j\omega) = j\ \sin\omega \tag{30}$$

Le signal analytique :

$$\Psi(t) = s(t) + j\sigma(t)$$

est ainsi transformé en :

$$\sigma(t-t_0) - js(t-t_0)$$

Donc, $s(t)$ est transformé en $\sigma(t)$: *le filtre défini par les formules (29) présente la propriété de transformer un signal réel $s(t)$ dans son signal en quadrature $\sigma(t)$*, avec une certaine approximation d'autant meilleure que le temps de propagation à travers le filtre est plus grand.

Le filtre (29), pour ω_0 et t_0 grands, ne présente pas de distorsion d'amplitude, mais une distorsion de phase. Son intérêt provient de ce qu'il fournit, nous semble-t-il, le moyen théorique le plus simple de faire apparaître l'existence du signal en quadrature, qui n'était intervenu jusqu'ici que pour des raisons de commodité de calcul.

19. Signal en quadrature et transmission par bande latérale unique.

Nous allons retrouver le signal en quadrature par un autre procédé, fondé sur l'expérience. On sait que le signal en quadrature apparaît comme signal parasite dans la transmission par bande latérale unique ; les considérations développées jusqu'ici permettent une explication claire du phénomène.

Soit un signal réel $s(t)$, occupant les fréquences comprises entre $-\omega_1$ et ω_1. Avec ce signal, modulons une porteuse $\cos\Omega t$, où $\Omega > \omega_1$. Modulons, avec le nouveau signal, une nouvelle porteuse $\cos\Omega t$, et filtrons par un passe-bande de bande $(-\Omega,\ \Omega)$. Nous obtenons le signal :

$$s(t)\cos^2\Omega t = \frac{1}{2}s(t)\big[1+\cos 2\Omega t\big]$$

ce qui, après filtrage, donne bien 1/2 $s(t)$. Tel est le cas idéal de transmission *sur deux bandes latérales.*

Supposons maintenant que la deuxième porteuse soit déphasée par rapport à la première ; soit $\cos(\Omega t+\varphi)$ cette porteuse. Nous obtiendrons le signal :

$$s(t)\cos\Omega t\cos(\Omega t+\varphi) = \frac{1}{2}s(t)\big[\cos\varphi + \cos(2\Omega t+\varphi)\big]$$

ce qui, après filtrage, donne $1/2\ s(t)\cos\varphi$. *Le déphasage se traduit par un affaiblissement du signal.*

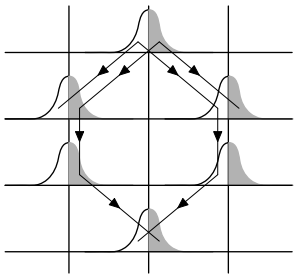

Fig. 4. — *Le spectre du signal est déporté vers la droite et vers la gauche, par la première modulation. Le filtrage supprime les hautes fréquences (correspondant que fréquences primitivement positives pour le spectre droit, primitivement négatives pour le spectre gauche). La deuxième modulation, si elle est en phase avec la première, reconstitue le spectre primitif, en remettant en place les fréquences positives et négatives. Si elle est déphasée par rapport à la première modulation, les fréquences positives et négatives se trouvent elles-mêmes déphasées, d'où apparition d'un signal en quadrature.*

Si nous opérons avec une seule bande latérale, soit la bande inférieure, nous aurons à intercaler un filtre entre les deux modulations, ce qui nous oblige à faire intervenir $\Psi(t)$. Soit $S(\omega)$ le spectre de $\Psi(t)$. Après la première modulation, ce spectre est devenu :

$$\frac{1}{2}\Big[S(\omega-\Omega)+S(\omega+\Omega)\Big]$$

Nous ne gardons que la bande inférieure, et procédons à la deuxième modulation (*fig.* 4). Si la deuxième porteuse est en phase avec la première, nous reconstituons le spectre primitif ; mais si elle n'est pas en phase, c'est-à-dire si nous multiplions par :

$$\frac{1}{2}\Big[e^{j(\Omega t+\varphi)}+e^{-j(\Omega t-\varphi)}\Big]$$

nous constatons qu'une moitié du spectre, la moitié droite, est multipliée par $e^{j\varphi}$, la moitié gauche par $e^{-j\varphi}$. Le signal final a donc un spectre tel que :

$$\text{pour } \omega>0 \qquad S_1(\omega)=\frac{1}{4}e^{j\varphi}S(\omega)$$
$$\text{pour } \omega<0 \qquad S_1(\omega)=\frac{1}{4}e^{-j\varphi}S(\omega)$$

Le signal analytique correspondant est donc :

$$\Psi_1(t)=\frac{1}{4}e^{j\varphi}\Psi(t)$$

Il y a eu *déphasage* de $\Psi(t)$, et par conséquent *le signal en quadrature s'introduit.* Nous avons exactement :

$$s_1(t)=\frac{1}{4}\Big[s(t)\cos\varphi-\sigma\sin\varphi\Big]$$

Nous voyons ainsi apparaître la différence essentielle entre les deux modes de transmission sur deux bandes latérales ou sur une seule bande latérale.

Le 1er septembre 1947

THEORY AND APPLICATIONS OF THE NOTION OF THE ANALYTIC SIGNAL

by J. VILLE
Doctor of Sciences
Telecommunications Laboratory of the Alsatian Society
of Mechanical Constructions

This publication by J. Ville[3] provides a formal basis for time-frequency methods. It develops the results of Carson and Fry[1] 1937, and Gabor[2] 1946. In particular, it introduces the *analytic signal*. Ville's paper has not been widely known, in part due to the fact that it was published in French and at a time when access to a wide range of Journals was less convenient.

A copy of this paper is available in English and in French. The English translation is produced from the same TEX source as the French one. I used a conditional statement to select either the French or the English text. This allowed keeping a single copy of all the displayed equations. Thus, if there are any remaining errors in the displayed equations, they must occur in both versions, but only need to be corrected once.

The English translation was completed in April 2011. There may be typographical and translation problems. So far, only I have done proof reading. Any suggestions for corrections or improvements would be most welcome. In March 2013 a few minor typos were corrected, a number of imprecise wordings were improved, and the layout was also improved for both the English and the French versions.

In February 2017 after Carver Mead pointed out some typos I rechecked the equations and found a substantial number of typos. These were corrected and a few translation clarifications were made. I updated the Web references to the *Internet Archive* which is the stable repository for both the English and French versions. If any updates become required they will appear there.

References

[1] Carson, J. R. & Fry, T. C. Variable Frequency Electric Circuit Theory with Application to the Theory of Frequency-Modulation. *Bell Syst Tech J*, 16(4):513–540, 1937.

[2] Gabor, D. Theory of Communication. *J. IEE*, 93, pt. III:429–457, 1946.

[3] Ville, J. Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique. *Câbles et Transmissions*, 2(1):61–74, 1948. Available in French at: archive.org or in English at: archive.org.

Michael D. Godfrey
February 2017

Stanford University
email: michaeldgodfrey@gmail.com
website: sites.google.com/site/michaeldgodfrey

Câbles et Transmissions, 2e A., No 1, pp. 61–74, 1948

THEORY AND APPLICATIONS OF THE NOTION OF THE ANALYTIC SIGNAL

by J. VILLE
Doctor of Sciences
Telecommunications Laboratory of the Alsatian Society
of Mechanical Constructions

SUMMARY

This publication is a contribution to the problem of the composite representation of a signal by a two dimensional distribution of the energy in a domain composed of two axes, the time axis and the frequency axis. The author proposes such a distribution, using operators analogous to those used in quantum mechanics. Thus one arrives at a definition of the instantaneous spectrum of a signal, and of the distribution of the energy associated with one frequency. By integration (with respect to time) of the instantaneous spectrum (which varies with time) one recovers the spectrum in the usual sense of the word. The author defines the instantaneous frequency of a signal in the same way, using the notion of an analytic signal (obtained by the analytic extension of the real signal when time is considered as a complex variable). These notions of instantaneous frequency and of the instantaneous spectrum are introduced to furnish a firm theoretical basis for studies of frequency modulation, of continuous harmonic analysis, of frequency compression, and, in a general manner, of all the problems for which classical harmonic analysis provides a description which departs too far from physical reality.

CONTENTS

I. — BIBLIOGRAPHICAL NOTE.

II. — INTRODUCTION.

1. **The quantity of information transmitted and the complexity of a signal.**
2. **Evaluation of the complexity of a signal by the number of substantial harmonics which are contained in its Fourier expansion.**
3. **Necessity of composite expansions in time and frequency for the study of certain questions.**
4. **Preliminary remarks on the concept of the instantaneous spectrum.**
5. **General state of the problem of the instantaneous spectrum and instantaneous frequency.**

III. — PART ONE: ANALYTIC SIGNALS AND INSTANTANEOUS FREQUENCY.

6. **Continuation of a real signal in the complex plane.**
7. **Analytic signals. These may be considered to be the result of the modulation of their envelope by a carrier which is itself frequency modulated. Instantaneous frequency.**
8. **All signals modulated by a sufficiently high frequency may be considered to be analytic.**

IV. — PART TWO: GROUP VELOCITY AND INSTANTANEOUS FREQUENCY.

9. **Group velocity and phase velocity.**

10. Epoch of a signal considered as the weighted mean of the epochs of different frequency groups.

11. Mean frequency of a signal considered as a weighted mean of different instantaneous frequencies.

V. — PART THREE: DISTRIBUTION OF ENERGY IN THE TIME-FREQUENCY DIAGRAM.

12. Characteristic function of the energy distribution.

13. Energy distribution. Instantaneous spectrum, the distribution in time of the energy associated with one frequency.

VI. — PART FOUR: APPLICATIONS OF THE CONCEPT OF THE ANALYTIC SIGNAL.

14. The time distribution of a signal. Amplitude and phase distortion.

15. Transfer admittances.

16. Band-pass filters; examples of physically realizable admittances.

17. Bell-shaped admittance curves.

18. Phase shift filter causing the appearance of the quadrature signal.

19. Quadrature signal and single side-band transmission.

TABLE SHOWING THE LIST
OF THE PRINCIPAL SYMBOLS USED

t	time.
$s(t)$	real signal.
$\sigma(t)$	quadrature signal.
$\Psi(t)$	$= s(t) + j\sigma(t)$: analytic signal.
f	frequency (in cycles).
ω	frequency (in radians).
$s(\omega)$	spectrum of a signal (the frequency express in radians).
$\Phi(f)$	spectrum of a signal (the frequency expressed in cycles).
$\bar{t}$	mean value of a time sequence.
$\bar{f}$	mean frequency.
t_f	mean time attached to a frequency f.
f_t	instantaneous frequency at time t.
	As a general rule, we make use of :
j	= the imaginary unit.
z^*	imaginary conjugate de z.
$\bar{\mu}$	mean value of the quantity μ.
$\|\mu\|$	modulus of μ.

I. — BIBLIOGRAPHICAL NOTE

The fundamental articles which deal with the general theory of systems of ≪variable frequency≫ are:

J. R. Carson and T. C. Fry, "Variable Frequency Electric Circuit Theory," *Bell System Technical Journal,* 1937, t. XVI, p. 513.

D. Gabor, "Theory of Communication," *Journal of the Institution of Electrical Engineers,* vol. 931 part III, no. 26, Nov. 1946, p. 429.

In the first of these articles, one studies the behavior, passing through a network, of a signal of the form $cos[\int \omega(t)dt + \varphi]$, of the variable frequency $\omega(t)$. In the second, the author is led to decompose a signal and a double series of signals, where each of the elementary signals occupies a certain domain of a two-dimensional time-frequency diagram. Carson, Fry, and Gabor have also considered composite representations, decomposing the signal simultaneously in time and on the frequency scale, but without giving an exact definition of the energy distribution in such diagrams, which leaves a certain arbitrariness in the methods of representation that they choose; on the contrary, in the present work we study a two-dimensional energy distribution, which presumes nothing about the form of the elementary signals used to analyze the given signal.

II. — INTRODUCTION.

1. The quantity of information transmitted and the complexity of a signal.

The transmission of communication signals is accomplished by means of a transmission of energy, generally of electromagnetic or of acoustic energy. In contrast to the case of power transmission, it is not energy itself which is of interest, but rather the changes in this energy in the course of time. The more complicated the function which represents, as a function of time, the change in voltage, current, pressure, or any other carrier, the greater is the amount of information carried by the transmitted energy.

2. Evaluation of the complexity of a signal by the number of substantial harmonics which are contained in its Fourier expansion.

In practice, in order to evaluate the degree of complexity of a function in a transmission system, one proceeds to harmonic analysis; that is, one expands the function into sinusoidal components in the form of a Fourier series or integral. A function $s(t)$ may therefore be considered from two different points of view:

a) **From the first point of view,** the function is considered directly; to each value of t there is associated a value of s, and the complexity of the function increases with the number of variations shown by the curve which represents s as a function of t. In the case of acoustic signals, this first point of view is difficult to specify; on the other hand, in the case of telegraph signals, which are composed of a series of pulses of the same length and height, it is easily seen that the function becomes more complicated directly with the increase of pulses which occur in a given interval of time.

b) **From the second point of view,** the function is considered to be composed of the superposition of sinusoidal functions which differ in amplitude and in phase. The function becomes more complicated directly as the number of sinusoidal components of substantial amplitude increases. This second point of view is of interest in the study of distortions; if, in effect, the signal is transmitted across a distorting system which suppresses certain sinusoidal components, there is a certain loss of information in this deformation which may be evaluated. From this it is seen that the capacity of a communication channel may be evaluated; this quantity being proportional to the number of independent frequencies that the channel can carry. The consideration of this second point of view is therefore essential in communication theory.

3. Necessity of composite expansions in time and frequency for the study of certain questions.

There exist some questions where the preceding points of view are insufficient. Since it is desirable to use a communication channel to the maximum, one is led to reject the integral transmission of a signal; in any case, distortions are inevitable. In particular, it is known that if the physiological impression produced by the superposition of harmonics were not, to some degree, independent of the relative phase of these harmonics, no long-distance telephone transmission would be possible. In the same sense, frequency compression would be physically unrealizable if the relative phase shifts of the different components had to be maintained in the compression of the frequencies. But this tolerance in transmission is not admissible in certain cases. If we consider a continuous note, emitted by an organ, for instance, we can de-phase the harmonics without degrading the sound. But, consider a symphony; if we expanded the corresponding sound in a Fourier series, we would obtain a series of harmonics, *lasting for the duration of the symphony,* which obviously we may not arbitrarily dephase.

So we see the necessity of going further into the harmonic analysis of a function. We are going to show the general course we should follow in the particular case of an acoustic signal.

4. Preliminary remarks on the concept of the instantaneous spectrum.

On hearing a fragment of music, there is no connection between the physiological impression received at an instant, and the amplitude of the acoustic signal $s(t)$ which is considered: the ear reacts only to a *succession* of values of $s(t)$. But this does not at all imply that the definition of $s(t)$ in terms of its sinusoidal components is perfect. If we consider a fragment containing many components (which is the least that one should ask) and one note, *la* for example, appears once in the fragment, the harmonic analysis will present us with the amplitude and the phase of the corresponding frequency, without locating the time point of the *la*. And yet, it is obvious that in the course of the fragment there will be instants when the *la* will not be heard. Nevertheless, the representation is mathematically correct, because the phase of the notes near *la* acts to destroy this note by interference when *la* is not heard, and to reinforce it, also by interference, when it is heard ; but if there exists in this concept a cleverness which does justice to mathematical analysis, there is also a distortion of reality; in fact, when *la* is not heard, the true reason is that *la is not emitted*.

It is therefore desirable to search for a composite definition of the signal, of the kind anticipated by Gabor: at each instant a number of frequencies is presented, giving the strength and the pitch of the sound which is heard; with each frequency there is associated a certain distribution in time which defines the intervals during which the corresponding note is emitted. This leads to the definition of the instantaneous spectrum as a function of time, which gives the structure of a signal at a given instant; the spectrum of the signal, in the usual sense of the term, which gives the frequency composition for the whole time interval of emission, is obtained by summing all the instantaneous spectra (precisely by integrating them with respect to time). Using a form of correlation, one is led to the distribution of frequencies in time; the signal is recovered by integrating these distributions.

Unfortunately, things are not as simple as they seem at first glance. We indeed see that we must consider *the continuous harmonic analysis* of a signal; therefore, for such an analysis we can either :

First cut the signal into pieces (in time) by a commutator ;

then present these different slices to a system of filters to analyze them.

Or :

First filter the different frequency bands ;

then cut the bands into pieces (in time) to study the energy variations.

Continuous harmonic analysis consists, then, of the application of two operators (filtering and commutation).

However, these two operators are such that either one of them, if it is very exact (very short pieces or very narrow bands) renders the other inoperative, because it deforms the signal considerably

(by the introduction of transient currents for commutation, or a long duration in time for narrow band filters). The instantaneous spectrum may only be determined, physically, to some approximation. But another question is presented to us: approximation *to what?* This is why we have tried to obtain a precise definition of instantaneous spectrum, in order to have a theoretical basis, non-existent until now, to guide research into the specification of apparatus for continuous harmonic analysis, frequency compression, or any other techniques for which the classical concepts of frequency and spectrum are insufficient.

After these general considerations, we shall pose the question in more precise terms.

5. General state of the problem of the instantaneous spectrum and instantaneous frequency.

One knows the difficulties presented by the definition of instantaneous frequency of a signal. These difficulties stem from the fact that the frequency of a sinusoid is defined rigorously only when the signal has an infinite duration ; the spectrum of a signal s(t), which may be expressed as

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int s(t) e^{-j\omega t} dt \tag{1}$$

is defined for the signal ensemble, and does not contain time explicitly. Therefore, in the classical theory, neither the instantaneous spectrum at the instant t nor the instantaneous frequency are susceptible to definition. However, this concerns intuitive concepts. If, for example, we consider a low frequency modulated signal of the form

$$s(t) = \cos\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t\right) \tag{2}$$

it is evident that the ≪instantaneous frequency≫ (which is conventionally defined in the case of frequency modulation) :

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t\right) = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t \tag{3}$$

has a physical significance, which becomes more precise when Ω is small when compared to ω_0.

We propose to give a definition of instantaneous spectrum, valid for a fairly extensive class of signals, and to develop certain applications, the consideration of which has led us to this problem. The definition which we propose to make introduces conventions which may appear arbitrary, but which are justified by the coherence of the results and by the parallelism with the analogous conventions which have been shown to be productive in quantum mechanics.

Our point of departure is the following: it has been easy to associate an instantaneous frequency with the signal (2) because this signal ≪can be considered≫ as the real part of the signal

$$\Psi(t) = e^{j(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \omega t)} \tag{4}$$

which *has a constant modulus.* The instantaneous frequency in radians/sec, is therefore :

$$\omega = \frac{d}{dt} \arg \Psi \tag{5}$$

We therefore, in the case of signals like this, extend it into the complex plane, by means of the form :

$$s(t) = \frac{1}{2}\left[\Psi(t) + \Psi^*(t)\right] \tag{6}$$

and we will thus obtain the instantaneous frequency by equation (5) ; $\Psi(t)$ is termed the *analytic signal.* The first part of this article will be devoted to the establishment of the corresponding equations. To justify, from another point of view, this definition of instantaneous frequency, we shall attach it to the concept of group velocity, which will constitute the second part. We then pass to the concept of the instantaneous spectrum, because instantaneous frequency defines a signal only quite grossly, and should be considered as the mean value, at a given instant, of the frequencies of the instantaneous spectrum. We treat this question in the third part, according to the following principles : a signal may be considered as the support of a certain amount of energy, whose distribution in time (given by the form of the signal) and in frequency (given by the spectrum) is known. If the signal extends through an interval of time T and an interval of frequencies Ω, we have therefore a distribution of energy in a rectangle of area $T\Omega$. We know the projections of this distribution upon the sides of the rectangle, but we do not know the distribution in the rectangle itself. If we try to determine the distribution within the rectangle, we encounter the following difficulty : If we divide the signal on the time scale, we extend the frequencies: if we divide it on the frequency scale, we extend the times. Thus the distribution cannot be determined by successive procedures. A simultaneous determination must be sought, which has only a theoretical significance : therefore we must operate *just* on the signal or *just* on the spectrum. But for the signal where, for example, time is a variable, frequency is, correctly speaking, an operator (the operator $(1/2)\pi j\ d/dt$, for frequencies in cps). We have determined the simultaneous distribution of t and of $(1/2)\pi j\ d/dt$, by methods of the calculus of probabilities, which easily leads to the instantaneous spectrum (and equally to the distribution in time of the energy associated with one frequency). It is seen that the formal character of the calculus used is imposed by the nature of the difficulty encountered, which is analogous to that which occurs in quantum mechanics when composing non-commuting operators. We shall use many results due to Gabor (Theory of Communication), and use the same notation, which allows us to avoid having to demonstrate some results, and permits us to principally develop new points of view. Finally, the forth part contains some applications of the concept of the analytic signal which have been forced upon us, as we have said, in the study of instantaneous frequency.

III. — PART ONE: ANALYTIC SIGNALS AND INSTANTANEOUS FREQUENCY

6. Extension of a real signal in the complex plane.

Consider the signal :

$$s(t) = \cos \omega t \tag{1}$$

We can consider, indifferently, as the real part :

$$\Psi(t) = e^{j\omega t} \tag{2}$$

or of :

$$\Psi^*(t) = e^{-j\omega t} \tag{3}$$

Since t takes only real values, there is no reason to choose one of these forms over the other. This would only happen if t were to take on complex values

$$t = \tau + j\theta \tag{4}$$

that we would see differences. If, in effect, θ goes to $+\infty$, Ψ goes to zero and Ψ^* goes to infinity.

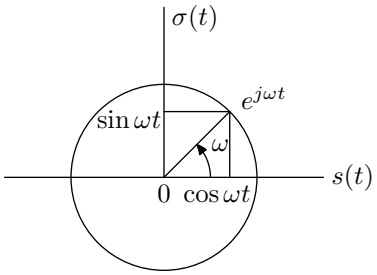

Fig. 1. *The instantaneous frequency* ω *of the signal* $\cos\omega t$ *is given by the angular velocity of the point with coordinates :* $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ ($\sin\omega t$ *: signal in quadrature of* $\cos\omega t$).

If we agree to conserve, in the possible measure, only the functions which are regular in the upper half-plane, we naturally choose (*fig.* 1)

$$\Psi(t) = e^{j\omega t} \tag{5}$$

Take another simple example. For the signal :

$$s(t) = \frac{1}{1+t^2} \tag{6}$$

We can consider indifferently the real parts of the two functions :

$$\frac{1}{1+jt} \quad \text{or} \quad \frac{1}{1-jt}$$

Only one of these, the second, is regular in the upper half-plane ; therefore we choose

$$\Psi(t) = \frac{1}{1-jt} \tag{7}$$

Consider a third example. Take the signal :

$$s(t) = \begin{cases} 1 & : -1 < t < +1 \\ 0 & : t < -1 \quad \text{or} \quad t > 1 \end{cases} \tag{8}$$

We can consider $s(t)$ as the real part of :

$$\Psi(t) = \frac{1}{\pi j} \log \frac{t-1}{t+1} \tag{9}$$

with a suitably chosen value. The function (9) is not uniform ; we can render it uniform in the upper half-plane by excluding from this half-plane the singular points -1 and $+1$.

In general, the above principles lead to the association with the signal $s(t)$ the signal *in quadrature,*

$$\sigma(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)d\tau}{\tau - t} \tag{10}$$

and the function

$$\Psi(t) = s(t) + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau \tag{11}^*$$

Formula (11) defines $\Psi(t)$ as a function of the complex variable t, holomorphic in the upper half-plane. We demonstrate that, conversely, one has, for t real :

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\tau)d\tau}{\tau - t} \tag{12}$$

---

* The original paper gave this equation as:

$$\Psi(t) = s(t) + j\sigma(t) = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)d\tau}{t-\tau} \tag{11}$$

Prof. Thomas Schanze noticed this and provided the correction.

7. Analytic signals. One can consider them as a result of the modulation of their envelope by a carrier which is itself modulated in frequency. Instantaneous frequency.

A signal such as $\Psi(t)$ will be called an *analytic signal.* We can then define $s(t)$ by :

$$s(t) = \mathrm{R}_e\left[|\Psi(t)|e^{j\arg\Psi}\right] \tag{13}$$

so that we define $s(t)$ to be the result *of the modulation of the signal* $e^{j\arg\Psi}$ *by the signal* $|\Psi|$. If we consider that $|\Psi|$ represents the *envelope* of $s(t)$, and that $e^{j\arg\Psi}$ is a signal which is *frequency modulated,* we obtain for the instantaneous frequency the expression shown in (*fig.* 2).

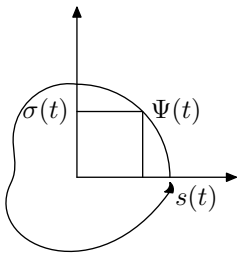

Fig. 2. — The *instantaneous frequency of the signal* $s(t)$ *is the angular velocity of the point* $\Psi(t) = s(t) + j\sigma(t)$, *where* $\sigma(t)$ *is the signal in quadrature of* $s(t)$.

$$f_t = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\arg\Psi = \frac{1}{4\pi j}\frac{\Psi^*}{\Psi}\frac{d}{dt}\frac{\Psi}{\Psi^*} \tag{14}$$

For $s(t) = \cos(\omega t + \varphi)$, we obtain :

$$\begin{cases} \Psi(t) & = e^{j(\omega t+\varphi)} \\ f_t & = \frac{\omega}{2\pi} \end{cases} \qquad \omega > 0 \tag{15}$$

The instantaneous frequency is constant for this signal. If we consider the signal :

$$s(t) = \frac{1}{1+t^2} = \mathrm{R}_e\Big[\frac{1}{1-jt}\Big]$$

we obtain :

$$f_t = \frac{1}{2\pi}\quad\frac{1}{1+t^2} \tag{16}$$

Now consider a modulated sinusoidal signal :

$$s(t) = \cos\omega t\cos\Omega t \qquad \Omega > \omega > 0$$

we have then :

$$\Psi(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j(\Omega+\omega)t} + e^{j(\Omega-\omega)t}\right]$$

$$|\Psi(t)| = \cos\omega t \qquad f_t = \frac{\Omega}{2\pi}$$

Here the instantaneous frequency is the frequency of the carrier, and $|\Psi|$ is the envelope as usually defined. One must remark the importance of the fact that in the exponentials the coefficients of t are positive. Neglecting this warning leads to exchanging the roles of ω and Ω, and leads to absurd results.

8. All signals modulated by a frequency sufficiently high can be considered as analytic.

The fact that in the preceding example one found for the instantaneous frequency the carrier frequency is not isolated, but results from the following proposition :

Whatever the signal $s(t)$, *the function :*

$$\overline{\Psi}(t) = s(t)e^{j\omega_0 t} \qquad \omega_0 > 0$$

which is not in general an analytic signal, more closely approaches the analytic signal $\Psi(t)$ *(associated with* $s(t)\cos\omega_0 t$*) as* ω_0 *becomes large :*

One immediately sees that this has as a consequence to attribute, for large values of ω_0, the instantaneous frequency $\omega_0/2\pi$ to $s(t)\cos\omega_0 t$.

The proposition that we will use is itself an immediate consequence of the fact that an analytic signal is characterized by the property of having a spectrum who's amplitude is null for negative frequencies. However, modulate $s(t)$ by $e^{j\omega_0 t}$ remembering to make a translation ω_0 of the spectrum of $s(t)$. For a sufficiently large value of ω_0 the spectrum is entirely in the region of positive frequencies, and $s(t)e^{j\omega_0 t}$ becomes analytic.[1)]

IV. — PART TWO : GROUP VELOCITY AND INSTANTANEOUS FREQUENCY.

9. Group velocity and phase velocity.

One knows that if a signal has a phase velocity V_φ, it's group velocity is :

$$V_g = \frac{d\omega}{d(\omega/V_\varphi)} \tag{1}$$

One observes from this equation that the simple characteristics are the *inverse* of the group and phase velocities, that is the time of group and phase propagation of given length.

10. Group epoch of a signal considered as a mean value of the group epochs of the different frequencies.

Now consider an analytic signal $\Psi(t)$, and $\Phi(f)$ its spectrum[2)]; we have :

$$\Psi(t) = \int \Phi(f) e^{2\pi j f t} df \tag{2}$$

$$\Phi(f) = \int \Psi(t) e^{-2\pi j f t} dt \tag{3}$$

$$(-1)^n \int \Psi^* t^n \Psi dt = \int \Phi^* \left[\frac{1}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right]^n \Phi dt \tag{4}$$

$$\int \Phi^* f^n \Phi df = \int \Psi^* \left[\frac{1}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right]^n \Psi dt \tag{5}$$

Attempt to evaluate the *epoch* of the signal. We can consider that the signal energy is manifested by the density $\Psi^*\Psi$ during the interval dt. This gives us a mean value for the epoch :

$$\bar{t} = \frac{\int \Psi^* t \Psi dt}{\int \Psi^* \Psi dt} \tag{6}$$

This epoch, having been determined by energy considerations, will be called the *group epoch.* Now using equation (4) ; we obtain :

$$\bar{t} = -\frac{1}{2\pi j}\frac{\int \Phi^* \frac{d}{df}\Phi df}{\int \Phi^* \Phi df} \tag{7}$$

---

1) This is the real reason why Gabor employed *modulated* bell-shaped signals.

2) We use, as appropriate, the notation ω or f for the frequency, measured in radians/sec or cycles/sec, respectively. The spectra are thus represented by $S(w)$ or $\Phi(f)$.

Show the modulus and argument of Φ :

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d}{df}\Phi = \frac{1}{|\Phi|}\frac{d}{df}\Phi + j\frac{d}{df}\arg\Phi$$

Since $\bar{t}$ is real, we obtain :

$$\bar{t} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\int \Phi^*\Phi\frac{d}{df}\arg\Phi df}{\int \Phi^*\Phi df} \tag{8}$$

Consider now that the signal energy is distributed across the frequency scales with density $\Phi\Phi^*$; we see that $\bar{t}$, *the group epoch relative to the entire signal,* becomes the weighted average of the quantities :

$$\bar{t}_f = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{df}\arg\Phi \tag{9}$$

which we thus consider like the *group epochs relative to different frequencies.* We therefore see that the *power associated with a frequency* f can be considered as manifested, with a certain averaging, as *the instantaneous average* $\bar{t}_f$.

11. The average signal frequency considered as a weighted average of the different instantaneous frequencies.

Invert now the role of f and of t. We establish thus that the mean signal frequency defined by :

$$\overline{f} = \frac{\int \Phi^* f\Phi df}{\int \Phi^*\Phi df}$$

can equally be defined by :

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi}\frac{\int \Psi^*\Psi\frac{d}{dt}\arg\ \Psi dt}{\int \Psi^*\Psi dt}$$

that is to say as *the weighted average of an instantaneous frequency* :

$$f_t = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\arg\Psi \qquad (\text{in } c/s) \tag{10}$$

We easily recover the expression that we already encountered.

V. — PART THREE: DISTRIBUTION OF ENERGY IN A TIME-FREQUENCY DIAGRAM

12. Characteristic function of the energy distribution

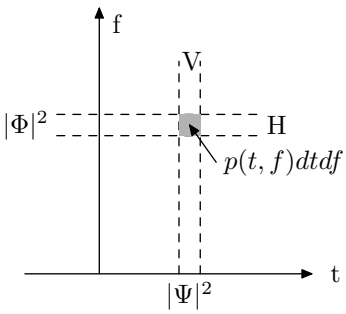

Fig. 3. — *At the element dt df, in the time frequency diagram, the corresponding energy is $p(t,f)dtdf$. The distribution of these energies in the vertical band gives an instantaneous spectrum at the time t ; in a horizontal band, we equally obtain in time the energy carried by one frequency. By projection on the axes, one obtains the signal (on the time axis) ans its spectrum (on the frequency axis).*

Now we define a distribution of the energy in time *and* in the frequency space of the form (*fig.* 3)

$$p(t,f)dtdf \tag{1}$$

We suppose in what follows, that we are dealing with a normed signal for which :

$$\int \Phi^*\Phi df = \int \Psi^*\Psi dt = 1 \tag{2}$$

which does not at all restrict the generality. p assumes the same properties as a probability distribution function, and we will determine its *characteristic function* :

$$F(u,\nu) = \iint e^{j(ut+\nu f)} p(t,f)dtdf \tag{3}$$

We have calculated the mean value of $e^{j(ut+\nu f)}$, but we could only do this since the function Ψ, does not contain f, or Φ, does not contain t. Therefore we are obliged to consider either t or f as operators. If we deal with Ψ, we are lead to the expression :

$$F(u,\nu) = \int \Psi^* e^{j\left(ut+\frac{\nu}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right)}\Psi(t)dt \tag{4}$$

Examine what this exponential operator provides, applied to Ψ. If we decompose it in two parts, we obtain, depending on the order in which we consider the factors :

$$e^{jut}e^{\frac{\nu}{2\pi}}\frac{d}{dt}\Psi(t) = e^{jut}\Psi\left(t+\frac{\nu}{2\pi}\right)$$

or :

$$e^{\frac{\nu}{2\pi}}\frac{d}{dt}e^{jut}\Psi(t) = e^{ju}\left(t+\frac{\nu}{2n}\right)\Psi\left(t+\frac{\nu}{2\pi}\right)$$

These equations are unacceptable, since they are incompatible with the relation :

$$F^*(u,\nu) = F(-u,-\nu)$$

which we deduced from (3) (for real u, ν).

Now consider the geometric mean[3)] of the two results given by the preceding equations :

$$e^{j\left(ut+\frac{\nu}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right)}\Psi(t) = e^{ju}\left(t+\frac{\nu}{4\pi}\right)\Psi\left(t+\frac{\nu}{2\pi}\right) \tag{5}$$

[3)] The form (5) of this operator is that which is obtained if one assumes that one develops the powers $\left(ut+\frac{\nu}{2\pi j}\frac{d}{dt}\right)^n$ *while conserving the order of the terms.*

We obtain (with a slight change of notation) :

$$F(u,\nu) = \int \Psi^*\left(t - \frac{\nu}{4\pi}\right)\Psi\left(t + \frac{\nu}{4\pi}\right)e^{jut}dt \tag{6}$$

which is an acceptable form of $F(u,\nu)$.

13. Energy distribution. Instantaneous spectrum ; the distribution in time of the energy associated with one frequency.

The presence of the factor e^{jut} shows that the characteristic function of f when t is known, is none other than :

$$\Psi^*\left(t - \frac{\nu}{4\pi}\right)\Psi\left(t + \frac{\nu}{4\pi}\right)\Big/|\Psi|^2 \tag{7}$$

where the distribution function of f *when* t *is known* :

$$p_t(f) = \frac{1}{2\pi|\Psi|^2}\int \Psi^*\left(t - \frac{\nu}{4\pi}\right)\Psi\left(t + \frac{\nu}{4\pi}\right)e^{-j\nu f}d\nu \tag{8}$$

The distribution function of t for $|\Psi(t)|^2$, we obtain explicitly as :

$$p(t,f) = \frac{1}{2\pi}\int \Psi^*\left(t - \frac{\nu}{4\pi}\right)\Psi\left(t + \frac{\nu}{4\pi}\right)e^{-j\nu f}d\nu \tag{9}$$

The modulus of the *instantaneous spectrum*[4], is given by equation (8) ; in an analogous manner the distribution, in time, of the energy attached to a frequency will be :

$$p_f(t) = \frac{1}{2\pi|\Phi|^2}\int \Phi^*\left(t + \frac{u}{4\pi}\right)\Phi\left(t - \frac{u}{4\pi}\right)e^{-jut}du \tag{10}$$

VI. — PART FOUR : APPLICATIONS OF THE CONCEPT OF THE ANALYTIC SIGNAL.

The duality that exists between time and frequency permits the development of a more clear idea of certain phenomena ; here we will treat some typical examples.

14. Determination of a time signal. Distortion of amplitude and of phase.

Take $\Phi(t)$ to be an analytic signal. If we concentrate on the frequency, we find that this signal has an envelope $|\Psi(t)|$ which modulates a signal with varying instantaneous frequency. Thus, in the distribution of frequencies, we expect to find *two terms,* one taking account of the *variation of instantaneous frequency,* the other the *variation of the amplitude of the envelope.* Analytically, suppose that we have taken for the frequency origin the mean frequency $\overline{f}$, the mean of the instantaneous frequencies.[5]) Thus we have :

$$\overline{f} = \int \Psi^*\Psi f_t dt = 0 \tag{1}$$

[4] It appears not to be possible to obtain the phase of the instantaneous spectrum.

[5]) Here we assume in addition that the signal is normed.

The distribution in frequencies will be :

$$\overline{f^2} = \int \Phi^* f^2 \Phi df \tag{2}$$

and the distribution of instantaneous frequencies :

$$\overline{f_t^2} = \int \Psi^* f_t^2 \Psi dt \tag{3}$$

Form the difference and express everything as a function of Ψ

$$\overline{f^2} - \overline{f_t^2} = -\frac{1}{4\pi^2} \int \left[\Psi^* \frac{d}{dt^2} \Psi + \Psi^* \left(\frac{d}{dt} \arg \Psi \right)^2 \Psi \right] dt \tag{4}$$

Take :

$$\Psi = |\Psi| e^{j \arg \Psi}$$

The derivation gives :

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d}{dt} \Psi = \frac{1}{|\Psi|} \frac{d}{dt} |\Psi| + j \frac{d}{dt} \arg \Psi$$

$$\frac{1}{\Psi} \frac{d^2}{dt^2} \Psi - \frac{1}{\Psi^2} \left(\frac{d}{dt} \Psi \right)^2 = -\frac{1}{|\Psi|^2} \left(\frac{d}{dt} |\Psi| \right)^2 + \text{ etc} \ldots$$

Carrying the expression $\frac{1}{\Psi} \frac{d^2}{df^2} \Psi$ into (4) and conserving only the real terms, results in :

$$\overline{f^2} - \overline{f_t^2} = -\frac{1}{4\pi^2} \int \left[\frac{d}{dt} |\Psi| \right]^2 dt$$

which gives the final expression for $\overline{f^2}$:

$$\overline{f^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int \Psi \Psi^* \left[\left(\frac{d}{dt} \arg \Psi \right)^2 + \left(\frac{1}{|\Psi|} \frac{d}{dt} |\Psi| \right)^2 \right] dt \tag{5}$$

We have derived the two terms as indicated above, the one relates to the spreading of instantaneous frequencies, the other to the amplitude variations of the envelope.

If we now reason about the spreading in time, we obtain, taking the origin of the mean time to be $\bar{t}$:

$$\overline{t^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int \Phi \Phi^* \left[\left(\frac{d}{df} \arg \Phi \right)^2 + \left(\frac{1}{|\Phi|} \frac{d}{df} |\Phi| \right)^2 \right] df \tag{6}$$

We return to familiar ideas ; in effect, if we suppose that the signal was produced by a Dirac impulse through a filter with characteristic $\Phi(f)$, we find in $\overline{t^2}$ the two distortion elements, the first term is the distortion due to phase, the second is the amplitude distortion. We remark that the phase distortion which is introduced here is a *distortion of the time of the group propagation* (≪delay distortion≫).

By use of logarithms, we obtain, for the time and frequency distortions, the expressions :

$$\overline{f^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int \left| \Psi^* \frac{d}{dt} \log \Psi \right|^2 dt = \int \left| \frac{d\Psi}{dt} \right|^2 dt$$

$$\overline{t^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int \left| \Phi^* \frac{d}{df} \log \Phi \right|^2 df = \int \left| \frac{d\Phi}{df} \right|^2 df \tag{7}$$

15. Transfer admittances.

Given a transfer admittance $Y(j\omega)$. One knows that if ω is complex, the resulting currents of the form $e^{j\omega t}$ are such that the imaginary part of ω is positive. Thus $Y(j\omega)$ is regular in the lower half-plane. If we investigate the properties of analytic signals, we see that one can pass from an admittance to an analytic signal by a change of variable :

$$\omega = -t \tag{8}$$

If $\Psi(t)$ is an analytic signal, we can deduce a transfer impedance by the equation :

$$Y(j\omega) = \Psi(-\omega) \tag{9}$$

The impulse admittance associated with $Y(j\omega)$ is :

$$B(t) = \frac{1}{2\pi} \int Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{10}$$

Furthermore, the spectrum of $\Psi(t)$ is :

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-j\omega t} \Psi(t) dt = B(\omega) \tag{11}$$

We note that $B(t)$ is null for negative values of t, and also $S(\omega)$ is null for negative values of ω. The sole new restriction that is imposed is that $B(t)$ has to be real, the requirements for $\omega(t)$ to be an analytic signal are that :

$$\Psi(-t) = \Psi^*(t) \qquad \text{(for } t \text{ real)} \tag{12}$$

Under condition (12), there is a perfect concordance between transfer admittances and analytic signals, between spectra and impulsive admittances.

16. Pass-band filters ; examples of physically realizable admittances.

The formation of a transfer admittance by a filter is an analog, we have seen, to the formation of an analytic signal. Or, to form an analytic signal, it suffices to start with an arbitrary signal $s(t)$, and form its spectrum, which gives :

$$s(t) = \int S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \qquad [S(-\omega) = S^*(\omega)] \tag{13}$$

and then, to preserve, by doubling it, only the part of the spectrum corresponding to positive frequencies, which leads to :

$$\Psi(t) = 2 \int_0^\infty S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{14}$$

In order to not cut into this spectrum, one can shift it to the right by a suitable modulation.

The corresponding procedure for forming a transfer admittance is as follows :

One starts with a non-physically realizable admittance, such as $Y_1(j\omega)$, and one determines the corresponding impulsive admittance $B_1(t)$:

$$B_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int Y_1(j\omega t) e^{j\omega} d\omega \tag{15}$$

$B_1(t)$ is non-zero for $t < 0$ (this is what indicates that Y_1 is not physically realizable). One shifts $B_1(t)$ to the right, and cuts it, such that $B_1(t) = 0$ for $t < 0$. One has deduced Y :

$$Y(j\omega) = \int_0^\infty B(t)e^{-j\omega t}dt \tag{16}$$

If T is the amplitude of the translation which was substituted for $B_1(t)$, we obtain :

$$Y(j\omega) = \int_0^\infty B_1(t-T)e^{-j\omega t}dt$$

If $B_1(t)$ is symmetric, one can also cut the end of the signal, which gives :

$$Y(j\omega) = \int_0^{2T} B_1(t-T)e^{-j\omega t}dt \tag{17}$$

This final admittance provides an advantage in that it does not have a phase distortion. But it has an amplitude distortion. So, for example :

$$Y_1 = \begin{cases} 1 & \text{for } \omega_1 < \omega < \omega_2 \quad \text{and} - \omega_2 < \omega < -\omega_1 \\ 0 & \text{outside the intervals above} \end{cases} \tag{18}$$

$$B_1(t) = \frac{\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t}{\pi(\omega_2 - \omega_1)t}$$

$$Y(j\omega) = \int_0^{2T} \frac{\sin\omega_2(t-T) - \sin\omega_1(t-T)}{\pi(\omega_2 - \omega_1)(t-T)}$$

$Y(j\omega)$ has as argument – $j\omega T$; it therefore has no distortion of phase. Otherwise, when T tends to infinity, $|Y|$ tends to the characteristic of an ideal pass-band filter ; but in the neighborhood of ω_1 and ω_2 there are oscillations due to the Gibbs phenomenon.

17. Bell-shaped admittance curves.

The ≪bell-curve≫ admittances permit the resolution of this difficulty. It is known that the signal :

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{19}$$

has the spectrum :

$$S(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}} \tag{20}$$

where, for the signal :

$$s(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{21}$$

the spectrum :

$$S(\omega) = e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} e^{-j\omega t_0} \tag{22}$$

If we modulate by $e^{j\omega_0(t-t_0)}(\omega_0 > 0)$, we replace the spectrum of ω_0, where :

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} e^{j\omega_0(t-t_0)} \\ S(\omega) &= e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}}\, e^{-j\omega t_0} \end{aligned} \tag{23}$$

Since $\omega_0 > \frac{3}{\sigma}$, $S(\omega)$ can be considered as situated in the region $\omega > 0$. For the signal :

$$s(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}} \cos\omega_0(t-t_0) \tag{24}$$

the corresponding spectrum is :

$$S(\omega) = e^{-j\omega t_0}\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} + e^{-\frac{\sigma^2(\omega+\omega_0)^2}{2}}\right] \tag{25}$$

For $t_0 > 3\sigma$, we can consider $S(\omega)$, given by (25) as a transfer admittance. For $\omega_0 > \frac{3}{\sigma}$, in (25) we can just keep the first term in brackets. One sees easily that in (24) if one replaces the cosines by sines, this leads to replacing (25) by :

$$S(\omega) = je^{-j\omega t_0}\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} - e^{-\frac{\sigma^2(\omega+\omega_0)^2}{2}}\right] \tag{26}$$

Suppose that we want to specify a pass-band in the band (ω_1, ω_2). We choose $\sigma > 3/\omega_1,\ t_0 > 3\sigma > 9/\omega_1$ and integrate on w_0 between ω_1 and ω_2, which gives (on adding appropriate coefficients) :

$$\begin{gathered} Y(j\omega) = S(\omega) = e^{-j\omega t_0}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}}\, d\omega_0 \\ s(t) = B(t) = \frac{1}{\pi}e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{\sin\omega_2(t-t_0) - \sin\omega_1(t-t_0)}{t-t_0} \end{gathered} \tag{27}$$

A low-pass filter is characterized by :

$$\begin{gathered} Y(j\omega) = e^{-j\omega t_0}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}}\, d\omega_0 \\ B(t) = \frac{1}{\pi}e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{\sin\omega_1(t-t_0)}{t-t_0} \end{gathered} \tag{28}$$

18. Phase shift filter causing the appearance of the quadrature signal.

If, instead of (25), we use the spectrum (26), and we integrate between 0 and ω_1, we obtain a filter of a special type, characterized by :

$$\begin{gathered} Y(j\omega) = -je^{j\omega t_0}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\omega_1}\left[e^{-\frac{\sigma^2(\omega-\omega_0)^2}{2}} - e^{-\frac{\sigma^2(\omega+\omega_0)^2}{2}}\right] d\omega_0 \\ s(t) = B(t) = \frac{1}{\pi}e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}\ \frac{1-\cos\omega_1(t-t_0)}{t-t_0} \end{gathered} \tag{29}$$

If ω_1 and σ tend to infinity, we see by increasing the factor $e^{-j\omega t_0}$, we obtain a transfer impedance of the form (for ω real) :

$$Y(j\omega) = j\ \sin\omega \tag{30}$$

The analytic signal :

$$\Psi(t) = s(t) + j\sigma(t)$$

is thus transformed to :

$$\sigma(t-t_0) - js(t-t_0)$$

So, $s(t)$ is transformed to $\sigma(t)$: *the filter defined by the expressions (29) provides the property of transforming a real signal $s(t)$ into its quadrature signal $\sigma(t)$*, with a certain approximation which improves as the propagation time across the filter becomes larger.

The filter (29), for large ω_0 and t_0, does not cause amplitude distortion, but does cause a phase distortion. Its interest comes from the fact that it provides, it seems to us, a simple theoretical means of showing the existence of a quadrature signal, which has not been used up to this point for reasons of calculational convenience.

19. Quadrature signal and single side-band transmission.

We will recover the quadrature signal by another procedure, based on experiment. One knows that the quadrature signal appears as a parasitic signal in single side-band transmission ; the considerations developed here permit a clear explanation of this phenomenon.

Consider a real signal $\sigma(t)$, within frequencies between $-\omega_1$ and ω_1. Modulate this signal with a carrier $\cos\Omega t$, where $\Omega > \omega_1$. Modulate, with a new signal, a new carrier $\cos\Omega t$, and filter with a pass-band of bandwidth $(-\Omega,\ \Omega)$. We obtain the signal :

$$s(t)\cos^2\Omega t = \frac{1}{2}s(t)\big[1+\cos 2\Omega t\big]$$

which, after filtering, gives $1/2$ $s(t)$. This is the case of ideal transmission *over two side bands.*

Now suppose that the second carrier is de-phased with respect to the first one ; take as this carrier $\cos(\Omega t+\varphi)$. We will obtain the signal :

$$s(t)\cos\Omega t\cos(\Omega t+\varphi) = \frac{1}{2}s(t)\big[\cos\varphi + \cos(2\Omega t+\varphi)\big]$$

which gives, after the filtering, $1/2$ $s(t)\cos\varphi$. *The de-phasing translates to a weakening of the signal.*

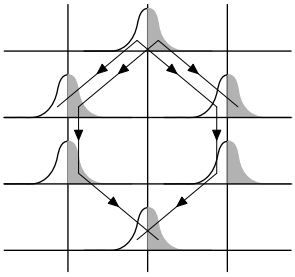

Fig. 4. — *The spectrum of a signal which is translated to the left, by the first modulation. The filter suppresses the high frequencies (corresponding to primitively positive for the right spectrum, primitively negative for the left spectrum. The second modulation, if it is in phase with the first, reconstructs the primitive spectrum, by replacing the positive and negative frequencies. If it is de-phased with respect to the first modulation, the positive and negative frequencies are themselves de-phased, so that a quadrature spectrum appears.*

If we operate with the single side-band, say the lower band, we will interleave a filter between the the two modulations, this requires us to use $\Psi(t)$. Let $S(\omega)$ be the spectrum of $\Psi(t)$. After the first modulation, the spectrum becomes :

$$\frac{1}{2}\Big[S(\omega-\Omega)+S(\omega+\Omega)\Big]$$

We only keep the lower band, and proceed to the second modulation (*fig.* 4). If the second carrier is in phase with the first, we recover the primitive spectrum ; but if it is not in phase, that is if we multiply by :

$$\frac{1}{2}\Big[e^{j(\Omega t+\varphi)}+e^{-j(\Omega t-\varphi)}\Big]$$

this results in a dividing of the spectrum, the right half is multiplied by $e^{j\varphi}$, the left half by $e^{-j\varphi}$. The final signal is therefore a spectrum such as :

$$\text{for } \omega>0 \qquad S_1(\omega) = \frac{1}{4}e^{j\varphi}S(\omega)$$

$$\text{for } \omega<0 \qquad S_1(\omega) = \frac{1}{4}e^{-j\varphi}S(\omega)$$

The corresponding analytic signal is therefore :

$$\Psi_1(t) = \frac{1}{4} e^{j\varphi} \Psi(t)$$

There was a *phase shift* of $\Psi(t)$, and consequently *the signal in quadrature is introduced.* We have exactly :

$$s_1(t) = \frac{1}{4} \left[s(t) \cos\varphi - \sigma \sin\varphi \right]$$

We see therefore the appearance of the essential difference between the two modes of transmission in two side bands or in a single side band.

1st september 1947